

ENONCE :

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$.

Démontrer que, pour tout n non nul, $S_n = \frac{n}{n+1}$.

Éléments de correction

$$S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Considérons la propriété : $\mathcal{P}_n$: « $S_n = \frac{n}{n+1}$ ».

- $\mathcal{P}_1$ est vraie car $S_1 = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$.

- Supposons que $\mathcal{P}_p$ soit vraie pour un entier naturel $p \geq 1$. Alors $S_p = \frac{p}{p+1}$.

$$S_{p+1} = S_p + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p(p+2)+1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p^2 + 2p + 1}{(p+1)(p+2)}$$

$$S_{p+1} = \frac{(p+1)^2}{(p+1)(p+2)} = \frac{p+1}{p+2}. \text{ Donc } \mathcal{P}_{p+1} \text{ est vraie. } \underline{\text{La propriété est héréditaire.}}$$

CONCLUSION : Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.